OPCIÓN A

1A.- (3 puntos) (a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:
$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}$. Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
(b) (1,5 puntos) Resuelva el sistema cuando k = 1**.**
Solución

(a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real: $\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}$. Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

En A como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix} F_2+F_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -1(-2k+k^2) + 0 – 0 = k\cdot(2 – k)$.

De |A| = 0, tenemos k = 0 y k = 2.

Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si k = 0, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} C_1+C_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -0 + 1\cdot(-1-2) - 0 = -3 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouche, el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si k = 2, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. En A como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} C_1+C_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1\cdot(-1-0) - 0 + 0 = -1 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouche, el **sistema es incompatible y no tiene solución.**
(b)
Resuelva el sistema cuando k = 1**.**

Hemos visto que en este caso el sistema y compatible y tiene una única solución.

$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \; (E_1+E_2) \\ -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases} \approx \begin{cases} x = 1 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases} \approx \begin{cases} x = 1 \\ -1 + y - z = 0 \\ 2 - y + 2z = -1 \; (E3+E2) \end{cases} \approx \begin{cases} x = 1 \\ -1 + y - z = 0 \\ 1 + z = -1 \end{cases}$, de donde x = 1, z=-2 e y = 1 – 2 = -1.
La solución única es **(x, y, z) = (1 , -1, -2).**

2A.- (a) (0,75 puntos) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: **u** = (1,1,1), **v** = (2,1,0) y **w**, siendo **w** = **u**x**v**, y donde el símbolo x representa el producto vectorial.
(b) (0'75 puntos) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P:(1,3,2) y es perpendicular a la recta.

$$s:\begin{cases} 3x-2y = -1 \\ 2y+3z = 3 \end{cases}.$$

Solución
(a)
Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores:
u = (1,1,1), **v** = (2,1,0) y **w**, siendo **w** = **u**x**v**, y donde el símbolo x representa el producto vectorial.

Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan con un origen común, es decir:

Tenemos **w** = **u**x**v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(0-1) - **j**(0-2) + **k**(1-2) = (-1, 2, -1)

Volumen = | [**u**, **v**, **w**] | **= | 6 | u³ = 6 u³.**

Porque [**u**, **v**, **w**] = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}_{F_3+F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera columna = 1(6-0) -0 + 0 = 6.

(b) (0'75 puntos) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto P:(1,3,2) y es perpendicular a la recta: $s:\begin{cases} 3x-2y = -1 \\ 2y+3z = 3 \end{cases}$.

Como el plano es perpendicular a la recta, el vector normal del plano **n** coincide con el director de la recta s, es decir **n =** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila **= i**(-6-0) - **j**(9-0) + **k**(6-0) = (-6, -9, 6). Otro proporcional es **n'** = (2, 3, -2).

La ecuación general de los plano que tienen ese vector normal es: *2x + 3y - 2z + K = 0*, y como pasa por el punto P:(1,3,2), tenemos 2(1) + 3(3) – 2(2) + K = 0, de donde K = -7, **y el plano pedido es:**
2x + 3y - 2z - 7 = 0.

3A.- (4 puntos) (a) (1 punto) Determine el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\ln((1+x)^2)} - \dfrac{1}{x}\right)$.

(b) (1 punto) Determine el valor de la constante k para que la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & , \text{si } x \neq 1 \\ k-x, & \text{si } x = 1 \end{cases}$, sea continua en x = 1.
(c) (2 puntos) La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A: (0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.
Solución
(a)
Determine el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\ln((1+x)^2)} - \dfrac{1}{x}\right)$.

La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\ln((1+x)^2)}{x\cdot\ln((1+x)^2)}\right)=\left\{\frac{0}{0},\text{L'H}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\frac{2\cdot(1+x)}{(1+x)^2}}{1\cdot\ln((1+x)^2)+x\cdot\left(\frac{2\cdot(1+x)}{(1+x)^2}\right)}\right)=\left\{\frac{0}{0},\text{L'H}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\left(\frac{2\cdot(1+x)^2-2\cdot(1+x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}\right)}{\frac{2\cdot(1+x)}{(1+x)^2}+1\cdot\left(\frac{2\cdot(1+x)}{(1+x)^2}\right)+x\cdot\left(\frac{2\cdot(1+x)^2-2\cdot(1+x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}\right)}\right)=\frac{-2+4}{2+2+0}\ \mathbf{=1/2}.$$

(b)

Determine el valor de la constante k para que la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x-1}, & \text{si } x\neq 1\\ k-x, & \text{si } x=1\end{cases}$, sea continua en $x = 1$.

Sabemos que f(x) es continua en x = 1 si $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$.

Tenemos f(1) = k – 1.

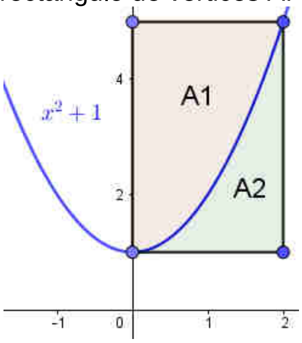
$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\left\{\frac{0}{0},\text{L'H}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3}{1}=4$. **Igualando tenemos k -1 = 4, de donde k = 5.**

(c)

La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los vértices A: (0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

La gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ es la de una parábola así (∪) porque el número que multiplica a ^{2} es positiva y abscisa del vértice en f '(x) = 2x = 0, de donde x = 0, y el vértice es V(0, 1).

Un esbozo la gráfica de la parábola y del rectángulo de vértices A: (0,1), B:(2,1), C:(0,5) y D:(2,5) es:



Luego las áreas A1 y A2 son:

Área1 = $\int_0^2(5-(x^2+1))dx=\int_0^2(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$ = [(8 - 8/3) - (0)] u^2 **= 16/3 u^2 ≅ 5'3333 u^2.**

Área2 = $\int_0^2(x^2+1-(1))dx=\int_0^2(x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$ = [(8/3) - (0)] u^2 **= 8/3 u^2 ≅ 2'66667 u^2.**

4A.- Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

(a) (0,5 puntos) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

(b) (0,5 puntos) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

(c) (0,5 puntos) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Solución

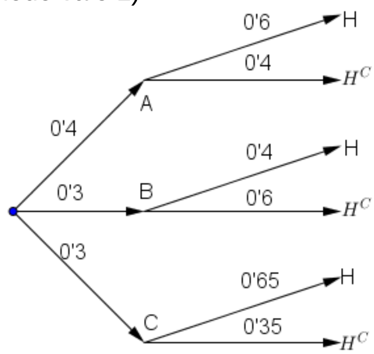
(a)

Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

Llamemos A, B, C, H y H^C, a los sucesos siguientes, “mes de julio”, “mes de agosto”, “mes de septiembre”, "en hotel" y " no en hotel", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 40% = 0’4; p(B) = 30% = 0’3; p(H/A) = 60% = 0’6; p(H/B) = 40% = 0’4, p(H/C) = 65% = 0’65, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(Agosto y hotel)** = **p(B∩H)** = p(B).p(H/B) = (0’3)(0’4) **= 0’12.**

(b)
Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(Hotel) = p(H)** = p(A)·p(H/A) + p(B)·p(H/B) + p(C)·p(H/C) =
= (0’4)·(0’6) + (0’3)·(0’4) + (0’3)·(0’65) **= 111/200 = 0’555**.
(c)
Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Me piden **p(ir en agosto si no va a hotel) = p(B/H^C)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/H^C) =} \frac{p\left(B\cap H^C\right)}{p(H^C)} = \frac{p(B)\cdot p(H^C/B)}{1 - p(H)} = \frac{(0'3)\cdot(0'6)}{1 - 0'555} \mathbf{= 36/89 \cong 0'4045}.$$

OPCIÓN B

1B.- (a) (1,5 puntos) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$.

(b) (1,5 puntos) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando m = -1.
Solución
(a)
Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix} F_2\text{-}3F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m\text{-}3 & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1[\,(m\text{-}3)(m) + 2] - 0 + 0 = m^2 - 3m + 2$.

De |A| = 0, $m^2 - 3m + 2 = 0$, $m = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, de donde m = 1 y m = 2.

Si m ≠ 1 y m ≠ 2, |A| ≠ 0 luego rango(A) = 3.

Si m = 1, A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 – 3 = -2 ≠ 0**, rango (A) = 2.**

Si m = 2, A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 – 3 = -1 ≠ 0**, rango (A) = 2.**

(b)
Determine la inversa de la matriz A anterior cuando m = -1.

Para m = -1, tenemos A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y hemos visto que en este caso existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6 \neq 0$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

2B.- (1,5 puntos) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta: s:$\begin{cases} 3x+y = -1 \\ 4y+3z = 5 \end{cases}$. y pasa por el punto A:(1,3,−1).

Solución

El haz de planos que contiene a la recta s es: (3x + y + 1) + m(4y + 3z - 5) = 0. Como el punto A:(1,3,-1) pertenece al plano → 3(1) + (3) + 1 + m(4(3) + 3(-1) - 5) = 0 → 7 + 4m = 0, de donde m = -7/4 y el plano pedido es (3x + y + 1) + (-7/4)·(4y + 3z - 5) = 0 → 12x + 4y + 4 - 28y - 21z + 35 = 0, es decir **el plano pedido es 12x - 24y - 21z + 39 = 0 = 4x - 8y - 7z + 13 = 0.**

3B.- (a) (1 punto) Considere la función: $f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$. Determine el valor de k para que la función f(x) tenga como asíntota oblicua, cuando x → +∞, la recta y = 2x – 1.

(b) (1,5 puntos) Determine $\int x(\ln(x))^2 dx$.

(c) (1’5 puntos) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$.

Solución

(a)

Considere la función: $f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$. Determine el valor de k para que la función f(x) tenga como asíntota oblicua, cuando x → +∞, la recta y = 2x - 1

Sabemos que una función f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma y = mx + n si se verifica:
$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.

Tenemos $2 = m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x\cdot(x^2 + 2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^3 + 2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3} = 2$ que vemos es cierto.

Luego $-1 = n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2+2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 + kx^2 + x + 3 - 2x^3 - 4x}{x^2+2}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx^2 - 3x + 3}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx^2}{x^2}\right) = k$, **de donde k = -1.**

(b)

Determine $\int x(\ln(x))^2 dx$.

$$I = \int x\cdot(\ln(x))^2 dx = \left\{\begin{array}{l} u=(\ln(x))^2 \Rightarrow du = \frac{2\cdot\ln(x)dx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = (\ln(x))^2\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\cdot\ln(x)dx}{x} = \frac{x^2}{2}\cdot(\ln(x))^2 - \int x\cdot\ln(x)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot(\ln(x))^2 - I_1 = \{**\} = \frac{x^2}{2}\cdot(\ln(x))^2 - \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) + \frac{x^2}{4} + K = \frac{x^2}{2}\cdot\left((\ln(x))^2 - \ln(x) + \frac{1}{2}\right) + K.$$

$$I_1 = \int x\cdot\ln(x)dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

(c)

Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$.

Me están pidiendo la monotonía y la curvatura, que es el estudio de f '(x) y de f ''(x)

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$; $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + x^2}{x^3}$.

Si f '(x) = 0 $\rightarrow$ $-x + x^2 = 0 = x\cdot(-1 + x)$, de donde x = 0 (**NO VALE, no existe ln(0)**) y x = 1. Luego x = 1 es el posible extremo relativo.

Como f '(0'5) = -0'25/(+) < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** ($\searrow$) **en (0, 1).**

Como f '(2) = 2/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** ($\nearrow$) **en (1, +∞).**

Por definición en x = 1 hay un mínimo relativo que vale f(1) = 1.

Sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada, y en ellos cambia la curvatura.

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$; $f'(x) = \frac{-x + x^2}{x^3}$; $f''(x) = \frac{(-1 + 2x)\cdot x^3 - (-x + x^2)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-x^3 + 2x^4 + 3x^3 - 3x^4}{x^6} = \frac{-x^4 + 2x^3}{x^6}$

De f ''(x) = 0, tenemos $-x^4 + 2x^3 = 0 = x\cdot(-x + 2)$, de donde x = 0 (NO SIRVE) y x = 2 que será el posible punto de inflexión.

Como f ''(1) = 1/(+) > 0, **f es convexa (∪) en (0, 2).**

Como f ''(3) = -27/(+) < 0, **f es cóncava (∩) en (2, +∞).**

Por definición **x = 2 es punto de inflexión y vale f(2) = 1/2 + ln(2).**

4B.- Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.
(a) (0,75 puntos) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).
(b) (0,75 puntos) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Solución

(a)

Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

Entre el 1 y el 25 hay 12 múltiplos de 2 luego la probabilidad de sacar par (éxito) en una jugada es
p = 12/25 = 0'48.

Recordamos que si realizamos **n** veces (100) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 0'48) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'48 = 0'52), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p).**
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(100; 0'48)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (100\ sobre\ k)\cdot 0'48^{k}\cdot 0'52^{(100-k)} = \binom{100}{k}\cdot 0'48^{k}\cdot 0'52^{(100-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n-k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X = 10)} = \binom{100}{10}\mathbf{\cdot 0'48^{10}\cdot 0'52^{90}} = \frac{100!}{10!\cdot 90!}\mathbf{\cdot 0'48^{10}\cdot 0'52^{90}}$.

(b)
Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

En este caso **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(200; 0'48)**.

Me piden p(90 ≤ X ≤ 110).

Como n·p = 200·0'48 = 96 y n·q = 200·0'52 = 104.**La variable X que sigue una binomial B(n;p) = = B(200; 0'48), se puede aproximar por la variable X ' que sigue una normal N(μ, σ) = N(n·p,√(npq)) = = N(96, √(96·0'52)) = N(96, 7'065)**

Como X es una distribución discreta y x ' es una distribución continua tenemos que aplicarle las correcciones de Yates:
p(X ≤ k) = p(X' ≤ x+0,5); p(X < x) = p(X' < x-0.5); p(X=x) = p(x-0,5≤ X' ≤ x+0,5)
p(a ≤ X ≤ b) = p(a-0'5 ≤ X' ≤ b+0'5) etc…

En nuestro caso **p(90 ≤ X ≤ 110) = p(90 - 0'5 ≤ X ' ≤ 110 + 0'5) = p(89'5 ≤ X ' ≤ 110'5) =** {Tipificamos} =

$$= p\left(\frac{89'5 - 96}{7'065} < Z < \frac{110'5 - 96}{7'065}\right) = p\left(-0'92 < Z < 2'05\right) = p(Z \leq 2'05) - p(Z \leq -0'92) = \{\text{suceso contrario}\} =$$

= p(Z ≤ 2'05) - (1 - p(Z ≤ 0'92)) = 0'9798 - (1 - 0'8212) **= 0'801**.